

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Направление «Физика»

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

ДИФРАКЦИЯ НА ПЛАСТИНЕ С ТРЕЩИНОЙ

Выполнил:

Студент Семушина Е.Н.

Научный руководитель,
д.ф.-м.н., профессор Андронов И.В.

Рецензент,
д.ф.-м.н., профессор Зернов Н.Н.

г. Санкт-Петербург, 2018

Содержание

Введение	3
1. Обзор литературы	5
2. Задача о свободной пластине	8
2.1. Постановка задачи	8
2.2. Построение решения	9
2.3. Асимптотическое исследование решения	11
Заключение	15
Список литературы	16

Введение

Теория дифракции – область математической физики, которая посвящена изучению задач распространения и дифракции волн различной природы. Традиционная теория дифракции имеет богатую историю исследования, начинающуюся с идей Х. Гюйгенса, которые в последствии развивались в работах других учёных.

Вклад Т. Юнга заключен в введении принципа интерференции, который позволяет объяснить наблюдаемые кольца Ньютона при соединении изогнутой стороны выпуклой линзы с плоской оптической поверхностью. Далее О. Френель дополнил принцип Гюйгенса идеей об интерференции вторичных волн.

Благодаря работам А. Пуанкаре и А. Зоммерфельда пришло понимание того, что в задачах дифракции электромагнитных волн речь идёт о краевой задаче математической физики. Зоммерфельд ввёл условия излучения, которые выделяют единственное решение краевой задачи уравнения Гельмгольца. Они заключены в том, что вся энергия, испущенная источником, должна уходить в бесконечность.

Текущая работа посвящена вопросам стационарной теории дифракции, а именно задаче, связанной с распространением волн по пластине. В связи с этим возникает необходимость описать некоторую теорию по этой теме.

Кромочными волнами называются поверхностные волны, которые распространяются вдоль свободной кромки полубесконечной пластины. В основе изучения кромочных волн лежит двумерная теория пластин. Пластинки обычно представляют собой тонкие структуры, которые работают под нагрузкой. Они широко используются в различных областях инженерии, таких как аэрокосмической, военно-морской, гражданской и т.д..

Впервые кромочная волна при изгибных колебаниях пластины была исследована в [1], в этой работе для описания колебания пластины применялась теория изгиба пластин Кирхгофа.

В анизотропных тонких пластинах изгибная кромочная волна существует и единственна [2]. Двумерные теории пластин описывают исключительно первую, или, иными словами, фундаментальную, кромочную волну в длинноволновом диапазоне.

Целью дипломной работы является построение и асимптотическое исследование решения задачи об изолированной пластинке, разделённой прямой бесконечно узкой трещиной на две идентичные части, с точечным источником излучения в начале координат.

В первой части работы приведён обзор литературы, касающийся исследования краевых волн в различных постановках задач с пластинами. Во второй части описана текущая проблема, построено её решение, которое далее асимптотически исследуется вблизи от источника и на бесконечности.

1. Обзор литературы

Для начала дадим определение изгибной волны рэлеевского типа, согласно статье [1]. Возьмём тонкую полубесконечную пластинку, которая совершает изгибные колебания. Вдоль её края распространяется изгибная волна, имеющая свойства, сходные со свойствами рэлеевской волны в полубесконечном пространстве.

Величина смещения убывает как экспонента при удалении от границы, а фаза волны изменяется вдоль края пластинки. В следствие этого имеем энергию волны, сосредоточенную в узкой полосе в непосредственной близости от края пластины. Далее подобная волна будет называться изгибной волной «рэлеевского» типа, иначе просто изгибной рэлеевской волной.

По сравнению с другими типами волн, которые могут возникать в тонкой пластине, рэлеевские волны распространяются с самой маленькой скоростью. Чем больше коэффициент Пуассона, которым обладает материал пластины, тем больше различаются скорости рэлеевских и изгибных волн.

Далее, в статье [3] рассматривается двумерная стационарная задача дифракции плоской гидроакустической волны на бесконечно узкой трещине между двумя полубесконечными пластинами, находящимися на поверхности жидкости и обладающими одинаковыми упругими характеристиками. На первом этапе находится решение задачи, затем исследуется полученное решение при $kh \rightarrow 0$ (k - волновое число, h - толщина пластины).

В дальнейшем задача, рассмотренная в [3] усложняется, исследуется случай систем трещин в упругой пластине и возникающее явление резонанса. В распространении акустических волн в полупространстве, заполненном жидкостью, которую покрывает упругий слой, явление дифракции возникает на неоднородностях этого слоя. Акустические волны могут как возбуждаться резонансным образом, так и затухать, в зависимости от расположения объектов, служащих для возникновения явления дифракции.

В этой статье [4] резонанс рассматривается для простейшей системы данного типа: жидкость покрыта однородной упругой пластиной, разделённой на три части двумя прямыми, параллельными трещинами с бесконечно малой толщиной. Случайное возмущение дано в виде плоской монохроматической волны.

Находится общее решение задачи дифракции для любого числа дефектов произвольного характера в пластине, которые расположены на параллельных прямых линиях. Затем находится дифракционное поле для случая двух трещин, выполняются асимптотические упрощения для низких частот и большого разделения трещин. На заключительном этапе устанавливается резонансный характер явления дифракции для систем данного типа.

Далее рассматриваются задачи, уточняющие классическую точечную модель трещины, которая справедлива лишь для "экспоненциально" узких по сравнению с толщиной пластины трещин, когда выполняется условие $kW \ll \exp(-(kh)^{-\frac{8}{5}})$, где W – ширина пластины, h – толщина пластины, k – волновое число [5]. В данной работе исследуются краевые волны, изученные для случая бесконечно узкой трещины. Проводится численное исследование дисперсионных уравнений для волновых чисел симметричных и антисимметричных краевых волн в зависимости от параметров системы пластина-жидкость.

Вблизи края пластины, которая находится в вакууме, может распространяться рэлеевская волна. Наличие контакта пластины с внешней акустической средой сказывается на характере колебаний и может привести к качественным изменениям в волновых процессах. В случае, когда вносимое акустической волной возмущение велико необходим численный анализ дисперсионных уравнений.

Исследование кромочных волн аналитически и численно установило, что симметричная волна существует всегда, а антисимметричная может существовать лишь в некотором диапазоне частот, который тем больше, чем меньше плотность акустической среды. И та, и другая волна распространяются с такими волновыми числами, что волновые поля достаточно медленно убывают по мере удаления от трещины.

Область применимости обобщённой модели трещины ограничена условием $kW \ll 1$. Вносимыми обобщённой моделью поправками для подобных узких трещин можно пренебречь, поэтому для описания волновых процессов вблизи пластины можно использовать классическую модель.

Наконец исследуется вопрос распространения кромочных волн вдоль прямолинейной трещины в упругой пластине. В данной работе изучается поток мощности, переносимой симметричной и антисимметричной кромочными вол-

нами и исследуется форма колебаний [6].

Представим поток мощности как сумму трёх мощностей: E' – мощность, переносимая в акустической среде, E'' – мощность изгибных колебаний пластины и выделенный из неё вклад мощности уголкового сил E''' .

Вклад мощности уголкового сил не изменяется в окрестностях частот совпадения и на критических частотах антисимметричной волны. Следовательно, можно допустить, что сохраняется характер поведения формы колебаний кромок пластин. Для симметричной и антисимметричной волны вблизи третины зависимости смещения ξ пластин от расстояния до кромки являются практически одинаковыми быстроспадающими кривыми.

Для антисимметричной волны в окрестности критических частот скорость убывания смещения замедляется. Изменения форм колебаний антисимметричной кромочной волны при достижении нижней критической частоты и верхней критической частоты имеют сходные эффекты. Подобные изменения форм колебаний приводят к нарастанию потока мощности в пластине и прилегающей акустической среде при приближении к критической частоте. Антисимметричную волну при этом возбудить труднее.

Заметим, что кромочные волны не переходят в рэлеевские для изолированной пластины при уменьшении плотности акустической среды. При любых плотностях антисимметричная кромочная волна не существует, если частота выше частоты совпадения. Единственной возможной формой колебания является симметричная волна. С другой стороны при отсутствии акустической среды полубесконечная пластина совершает независимые колебания.

2. Задача о свободной пластине

2.1. Постановка задачи

Пусть в трёхмерном пространстве имеется горизонтально расположенная бесконечная упругая пластина, разделённая прямолинейной бесконечно тонкой трещиной на две идентичные части. На данном этапе мы рассматриваем свободную пластину, то есть полупространство снизу от неё ничем не заполнено. В начале координат находится точечный источник излучения (2.1). Наша задача определить, какие волны распространяются по пластине.

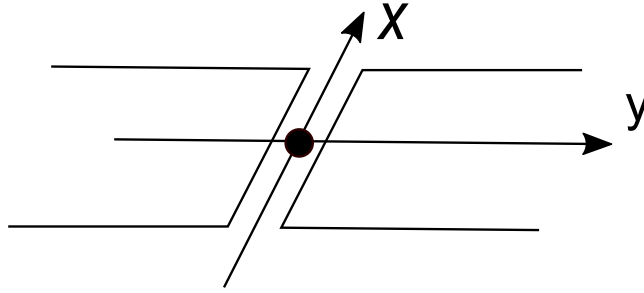


Рис. 2.1. Геометрия задачи

В рассматриваемой задаче зависимость от времени гармоническая, и временной множитель выбран в виде $e^{-i\omega t}$, который всюду опущен. Функция ω удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 \omega - k_0^4 \omega = 0, \quad (1)$$

граничным условиям при $y = \pm 0$

$$\begin{aligned} \omega_{yy} + \sigma \omega_{xx} &= 0, \\ \omega_{yyy} + (2 - \sigma) \omega_{yyx} &= 0, \quad x \neq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и начальным условиям

$$\begin{aligned} \omega(0, +0) &= \omega(0, -0), \\ \omega_y(0, +0) &= \omega_y(0, -0). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь σ - коэффициент Пуассона.

Мы имеем дело с дифференциальным уравнением в неограниченной области, поэтому должен выполняться принцип предельного поглощения, который

позволяет выделить единственное решение уравнения.

2.2. Построение решения

Представим ω в виде преобразования Фурье:

$$\omega(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} W(\lambda, y) d\lambda. \quad (4)$$

Подставляем данное представление в исходное уравнение (1), получаем:

$$W^{(4)} - 2\lambda^2 W^{(2)} + (\lambda^4 - k_0^4) W = 0. \quad (5)$$

Решением уравнения (5) будет:

$$W = a(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2} |y|} + b(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 + k_0^2} |y|}. \quad (6)$$

С учётом решения (6), перепишем граничные условия (2) в интегральном виде:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} (a(\lambda) (\lambda^2 - k_0^2) + b(\lambda) (\lambda^2 + k_0^2) - \lambda^2 \sigma(a(\lambda) + b(\lambda))) d\lambda = 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \left(-a(\lambda) (\lambda^2 - k_0^2)^{\frac{3}{2}} - b(\lambda) (\lambda^2 + k_0^2)^{\frac{3}{2}} + \right. \\ \left. + \lambda^2 (2 - \sigma) \left(a(\lambda) \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + b(\lambda) \sqrt{\lambda^2 + k_0^2} \right) \right) d\lambda = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициенты $a(\lambda), b(\lambda)$ определяются из системы (7):

$$\begin{cases} a(\lambda) (\lambda^2 - k_0^2) + b(\lambda) (\lambda^2 + k_0^2) - \sigma \lambda^2 (a(\lambda) + b(\lambda)) = p_1(\lambda), \\ -a(\lambda) (\lambda^2 - k_0^2)^{3/2} - b(\lambda) (\lambda^2 + k_0^2)^{3/2} + \\ + \lambda^2 (2 - \sigma) \left(a(\lambda) \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + b(\lambda) \sqrt{\lambda^2 + k_0^2} \right) = p_2(\lambda). \end{cases}$$

Приведём рассуждения для определения выражений $p_1(\lambda)$ и $p_2(\lambda)$. Граничные условия (2) выполняются при всех значениях x за исключением точки

$x = 0$. Из этого следует, что левые части уравнений (2) представляют собой некоторые комбинации δ -функций и их производных. $p_1(\lambda)$ и $p_2(\lambda)$ являются Фурье-образами этих комбинаций, значит они являются полиномами. Чтобы определить степень этих полиномов надо привлечь условие конечности энергии в окрестности точки $x = 0$. Известно, что энергия E выражается интегралом от произведений вторых производных решения [7]:

$$E = \frac{D}{4} \int \int \left(|\Delta\omega|^2 + 2(1-\sigma) \left(\left| \frac{\partial^2\omega}{\partial x \partial y} \right|^2 - \left| \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} \right| \left| \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} \right| \right) \right) dx dy, \quad (8)$$

здесь D - цилиндрическая жёсткость пластины.

Для того, чтобы эти интегралы были конечны, особенность решения в точке $x = 0$ не может быть сильнее чем $r^{-\frac{3}{2}}$, где r - расстояние до начала координат. Если в интеграле Фурье подынтегральное выражение убывает как $\frac{1}{\lambda}$ [8] - решение будет логарифмом. Каждое дифференцирование даёт множитель λ . В итоге получается ограничение на скорость убывания $\frac{1}{\lambda^3}$.

Находим решение неоднородной системы методом Крамера:

$$\begin{cases} a(\lambda) = \frac{p_1(\lambda)\sqrt{\lambda^2+k_0^2}(\lambda^2(1-\sigma)-k_0^2)-p_2(\lambda)(\lambda^2(1-\sigma)+k_0^2)}{\sqrt{\lambda^2+k_0^2}(\lambda^2(1-\sigma)-k_0^2)^2-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}(\lambda^2(1-\sigma)+k_0^2)^2}, \\ b(\lambda) = \frac{p_2(\lambda)(\lambda^2(1-\sigma)-k_0^2)-p_1(\lambda)\sqrt{\lambda^2-k_0^2}(\lambda^2(1-\sigma)+k_0^2)}{\sqrt{\lambda^2+k_0^2}(\lambda^2(1-\sigma)-k_0^2)^2-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}(\lambda^2(1-\sigma)+k_0^2)^2}. \end{cases}$$

Пусть $p_1(\lambda) = 0$, $p_2(\lambda) = C$, где $C = Const$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} a(\lambda) = \frac{-C(\lambda^2(1-\sigma)+k_0^2)}{\sqrt{\lambda^2+k_0^2}(\lambda^2(1-\sigma)-k_0^2)^2-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}(\lambda^2(1-\sigma)+k_0^2)^2}, \\ b(\lambda) = \frac{C(\lambda^2(1-\sigma)-k_0^2)}{\sqrt{\lambda^2+k_0^2}(\lambda^2(1-\sigma)-k_0^2)^2-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}(\lambda^2(1-\sigma)+k_0^2)^2}. \end{cases} \quad (9)$$

Нули знаменателя находятся из однородной системы:

$$\begin{cases} a(\lambda)(\lambda^2(1-\sigma)-k_0^2)+b(\lambda)(\lambda^2(1-\sigma)+k_0^2)=0, \\ a(\lambda)\sqrt{\lambda^2-k_0^2}(\lambda^2(1-\sigma)+k_0^2)+b(\lambda)\sqrt{\lambda^2+k_0^2}(\lambda^2(1-\sigma)-k_0^2)=0. \end{cases} \quad (10)$$

Чтобы система (10) имела нетривиальные решения, необходимо, чтобы её определитель был равен нулю. Тогда получим:

$$\sqrt{\lambda^2+k_0^2}(\lambda^2(1-\sigma)-k_0^2)^2-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}(\lambda^2(1-\sigma)+k_0^2)^2=0.$$

Решая это уравнение, получим следующие корни:

$$\lambda_{1,\dots,4} = k_0 \left(\frac{1 - 3\sigma + 2\sqrt{2(1-\sigma)^2 - 2(1-\sigma) + 1}}{4(1-\sigma)(1-(1-\sigma)^2)} \right)^{1/4}, \quad (11)$$

$$\lambda_{5,\dots,8} = k_0 \left(\frac{1 - 3\sigma - 2\sqrt{2(1-\sigma)^2 - 2(1-\sigma) + 1}}{4(1-\sigma)(1-(1-\sigma)^2)} \right)^{1/4}. \quad (12)$$

2.3. Асимптотическое исследование решения

Перейдем к исследованию решения. Рассмотрим решение вблизи от источника излучения. Введём обозначение:

$$f(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 + k_0^2} (\lambda^2(1-\sigma) - k_0^2)^2 - \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} (\lambda^2(1-\sigma) + k_0^2)^2.$$

Для того, чтобы определить поведение решения вблизи от источника, необходимо рассмотреть предел

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \pm 0}} \omega(x, y) = \\ = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \pm 0}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \frac{-C(\lambda^2(1-\sigma) + k_0^2) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}|y|} + C(\lambda^2(1-\sigma) - k_0^2) e^{-\sqrt{\lambda^2 + k_0^2}|y|}}{f(\lambda)} d\lambda. \end{aligned} \quad (13)$$

Фиксируем ветви корней следующим образом: считаем $\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ на промежутке $(-k, k)$ отрицательным и положительным на интервалах $(-\infty, -k)$ и $(k, +\infty)$; а корень $\sqrt{\lambda^2 + k_0^2}$ считаем отрицательным на промежутке $(-ik, ik)$ и положительным на $(-i\infty, -ik)$ и $(ik, +i\infty)$. Затем совершаем два последовательных предельных перехода в выражении (13), сначала по переменной x , затем по переменной y .

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \pm 0}} \omega(x, y) = \\ = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-C(\lambda^2(1-\sigma) + k_0^2) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}|y|} + C(\lambda^2(1-\sigma) - k_0^2) e^{-\sqrt{\lambda^2 + k_0^2}|y|}}{f(\lambda)} d\lambda = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2Ck_0^2}{f(\lambda)} d\lambda. \end{aligned} \quad (14)$$

Контур интегрирования изображён на рисунке 2.2 жирной линией. Проведены четыре разреза через точки ветвления функции $f(\lambda)$.

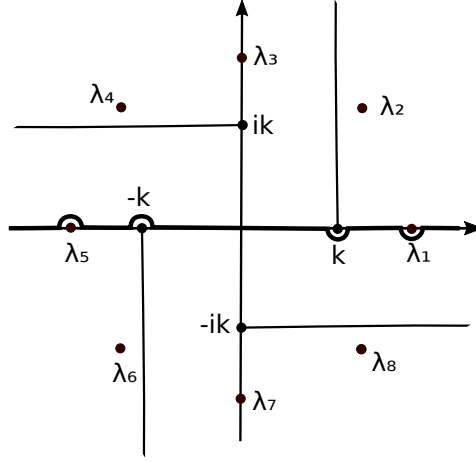


Рис. 2.2. Контур интегрирования

Переходим к новому контуру интегрирования (Рис. 2.3), деформируя исходный контур так, чтобы он огибал разрезы. Тогда интеграл распадется на два: по контуру Γ_1 и по контуру Γ_2 . При деформировании пересекаются два вычета λ_1, λ_2 .

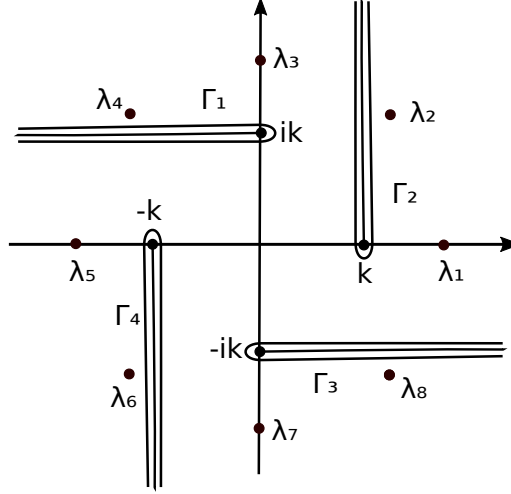


Рис. 2.3. Новый контур интегрирования

Тогда получим следующее выражение:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \pm 0}} \omega(x, y) = \int_{\Gamma_1} \frac{-2Ck_0^2 d\lambda}{f(\lambda)} + \int_{\Gamma_2} \frac{-2Ck_0^2 d\lambda}{f(\lambda)} + 2\pi i \sum_{j=1}^2 \text{res} \frac{-2Ck_0^2}{f(\lambda_j)}. \quad (15)$$

Замена переменной интегрирования λ в интеграле по контуру Γ_2 на $i\lambda$ переводит контур Γ_2 в контур Γ_1 , а подынтегральное выражение меняет знак.

Следовательно, интегралы в выражении (15) сокращаются, в итоге получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \pm 0}} \omega(x, y) &= 2\pi i \sum_{j=1}^2 \operatorname{res} \frac{-2Ck_0^2}{f(\lambda_j)} = 2\pi i \sum_{j=1}^2 \frac{-2Ck_0^2}{\frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda_j)} \\ &= -\frac{\pi i C}{2k_0^2(\sigma - 1)} \sum_{j=1}^2 \frac{\sqrt{1 + M_j^2} (1 + M_j^2(\sigma - 1))^2}{M_j^3 (M_j^4(\sigma - 1)^2(\sigma + 3) + 3\sigma - 1)}, \end{aligned} \quad (16)$$

где явные выражения для вычетов λ_1, λ_2 :

$$\lambda_{1,2} = \left(\frac{k_0^4 (-3\sigma^2 + 4\sigma - 1 \mp 2\sqrt{1 - 4\sigma + 7\sigma^2 - 6\sigma^3 + 2\sigma^4})}{\sigma^4 - 6\sigma^2 + 8\sigma - 3} \right)^{\frac{1}{4}} = k_0 M_{1,2}. \quad (17)$$

Теперь перейдём к исследованию решения на бесконечности. Для этого рассмотрим предел:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \pm \infty}} \omega(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \pm \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \left(a(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}|y|} + b(\lambda) e^{-\sqrt{\lambda^2 + k_0^2}|y|} \right) d\lambda. \quad (18)$$

На бесконечности $e^{-\sqrt{\lambda^2 + k_0^2}|y|}$ убывает, поэтому интеграл, содержащий эту экспоненту, можно не рассматривать.

Переходим к полярным координатам (r, φ) :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Произведём замену переменной интегрирования λ на $k_0\tau$. Тогда выражение (18) принимает вид:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \pm \infty}} \omega(x, y) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_0 a(k_0\tau) e^{ik_0r(\tau \cos \varphi + \sqrt{1 - \tau^2} |\sin \varphi|)} d\tau. \quad (19)$$

Для того, чтобы посчитать интеграл, воспользуемся методом перевала. Обозначим $\Phi(\tau) = \tau \cos \varphi + \sqrt{1 - \tau^2} |\sin \varphi|$. Далее нужно найти точки перевала, т.е. точки, где $\Phi'(\tau) = 0$. Решаем уравнение

$$\Phi'(\tau) = \cos \varphi - \frac{\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} |\sin \varphi| = 0$$

и находим стационарную точку $\tau_s = \cos \varphi$.

Теперь деформируем исходный контур в перевальный, проходящий через стационарную точку τ_s . При такой деформации будет пересечён полюс λ_1 . Далее считаем интеграл по методу Лапласа [9], в итоге получаем, что при $k_0 r \rightarrow \infty$:

$$\omega(k_0 r) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{k_0 r}} k_0 a(k_0 \cos \varphi) \sin \varphi e^{ik_0 r + i\frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\right). \quad (20)$$

Из этого выражения можно получить диаграмму направленности:

$$\Psi(\varphi) = a(k_0 \cos \varphi) \sin \varphi, \quad (21)$$

где вид a известен из формулы (9). Вклад вычета даст волны, бегущие вдоль кромки:

$$\begin{aligned} 2\pi i \operatorname{res} e^{i\lambda x} \left(\frac{-C(\lambda^2(1-\sigma) + k_0^2)}{f(\lambda_1)} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}|y|} + \frac{C(\lambda^2(1-\sigma) - k_0^2)}{f(\lambda_1)} e^{-\sqrt{\lambda^2 + k_0^2}|y|} \right) = \\ = \frac{i\pi C}{2k_0^2(\sigma - 1)} \frac{\sqrt{1 + M_1^2} ((\sigma - 1)M_1^2 - 1) ((\sigma - 1)M_1^2 + 1)^2}{M_1^3 (M_1^4(\sigma - 1)^2(\sigma + 3) + 3\sigma - 1)} e^{i\lambda_1 x - \sqrt{\lambda_1^2 - k_0^2}|y|} + \\ + \frac{i\pi C}{2k_0^2(\sigma - 1)} \frac{\sqrt{1 + M_1^2} (M_1^2(\sigma - 1) + 1)^3}{M_1^3 (M_1^4(\sigma - 1)^2(\sigma + 3) + 3\sigma - 1)} e^{i\lambda_1 x - \sqrt{\lambda_1^2 + k_0^2}|y|}. \end{aligned} \quad (22)$$

Амплитуды кромочных волн A_1 , A_2 имеют вид:

$$A_1 = \frac{i\pi C}{2k_0^2(\sigma - 1)} \frac{\sqrt{1 + M_1^2} ((\sigma - 1)M_1^2 - 1) ((\sigma - 1)M_1^2 + 1)^2}{M_1^3 (M_1^4(\sigma - 1)^2(\sigma + 3) + 3\sigma - 1)}, \quad (23)$$

$$A_2 = \frac{i\pi C}{2k_0^2(\sigma - 1)} \frac{\sqrt{1 + M_1^2} (M_1^2(\sigma - 1) + 1)^3}{M_1^3 (M_1^4(\sigma - 1)^2(\sigma + 3) + 3\sigma - 1)}. \quad (24)$$

Заключение

Акустические волны, распространяющиеся в тонких пластинах исследовались на протяжении многих лет. Большое количество задач дифракции до сих пор требуют приближённого асимптотического подхода.

В результате проделанной работы мы построили решение поставленной задачи и исследовали его асимптотику вблизи источника излучения и на бесконечности от него. В итоге выписали выражение для начальной амплитуды (16), выразили амплитуду кромочных волн, распространяющихся вдоль кромки пластины (23), а также диаграмму направленности круговой волны, распространяющейся во все стороны (21).

Список литературы

1. Коненков Ю. К. Об изгибной волне рэлеевского типа // Акуст.журн. — 1960. — Т. Т.6.(2).
2. Fu Y. B. Existence and uniqueness of edge waves in a generally anisotropic elastic plate // Q.Jl.Mech. Appl.Math. — 2003. — Vol. V.56. — P. 605–616.
3. Коузов Д. П. Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине // Прикл.матем. и механика. — 1963. — Т. 27(6). — С. 1037–1043.
4. Коузов Д. П. О явлении резонанса при дифракции гидроакустической волны на системе трещин в упругой пластине // Прикл.матем. и механика. — 1964. — Т. 28(3). — С. 409–417.
5. Андронов И. В. О волнах, распространяющихся вдоль узкой трещины в упругой пластине // Акуст.журн. — 1999. — Т. 45(4). — С. 445–449.
6. Андронов И. В. О потоке мощности вдоль прямолинейной трещины в упругой пластине // Акуст.журн. — 2001. — Т. 47(3). — С. 293–296.
7. Andronov I. V. Generalized point models in structural mechanics. — Singapore : World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 2002. — 276 p.
8. Титчмарш Э. Ч. Введение в теорию интегралов Фурье. — М.: ОГИЗ Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. — 418 с.
9. Федорюк М. В. Метод перевала. — Наука, 1977. — 368 с.